# 第七周作业：关系及其性质

## Problem 1

设集合 $A=\{a,b,c\}$, 判断以下结论是否正确.

(1) $\emptyset \subseteq A\times A$

(2) $\{a,c\}\in A$

(3) $\{a,b\}\in A\times A$

(4) $(c,c)\in A\times A$

$A\times A=A^2=\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$.

(1) 正确

(2) 错误

(3) $(a,b)=\{a,\{a,b\}\}$. 故正确 ✗

(4) 正确

## Problem 2

证明 $A\times B\neq B\times A$ 除非 $A=B$, 其中 $A$和 $B$均为非空集合.

即证 $A\times B=B\times A \Leftrightarrow A=B$.

必要性($\Rightarrow$): 假设 $A\neq B$.

由 $A,B$非空, 设 $a\in A$ 且 $a\notin B$, $b\in B$.

则 $(a,b)\in A\times B$. 但 $a\notin B$. 故 $(a,b)\notin B\times A$.

与 $A\times B=B\times A$ 矛盾.

则必要性得证.

充分性($\Leftarrow$): $A=B$时, 显然有 $A\times B=B\times A$

故原命题得证.

## Problem 3

设 $R$是从集合 $A$到集合 $B$的关系, 从集合 $B$到集合 $A$的逆关系 (记作 $R^{-1}$) 是有序对集合 $\{(b,a)\mid(a,b)\in R\}$;而补关系 $\bar{R}$是有序对集合 $\{(a,b)\mid(a,b)\notin R, a\in A, b\in B\}$.

若 $R$ 是正整数集合上的关系: $R=\{(a,b)\mid a$ 整除 $b\}$, 求

(1) $R^{-1}$

(2) $\bar{R}$

(1) $R^{-1}=\{(b,a)\mid a$整除$b\}$

(2) $\bar{R}=\{(a,b)\mid a$不整除$b\}$

## Problem 4

设

$$A = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,3\rangle\}$$
$$B = \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 4,2\rangle\}$$

求

(1) $A \cup B, A \cap B$

(2) $\text{dom } A, \text{dom } B, \text{dom } (A \cup B)$

(3) $\text{ran } A, \text{ran } B, \text{ran } (A \cap B)$

(4) $\text{fld } (A - B)$

(1) $A \cup B = \{<1,2>, <1,3>, <2,4>, <3,3>, <4,2>\}$

$A \cap B = \{<2,4>\}$

(2) $\text{dom} A = \{1,2,3\}$ $\text{dom} B = \{1,2,4\}$

$\text{dom}(A \cup B) = \{1,2,3,4\}$

(3) $\text{ran } A = \{2,3,4\}$ $\text{ran } B = \{2,3,4\}$

$\text{ran}(A \cup B) = \{2,3,4\}$

(4) $A - B = \{<1,2>, <3,3>\}$

$\text{fld}(A-B) = \text{dom}(A-B) \cup \text{ran}(A-B)$

$= \{1,3\} \cup \{2,3\}$

$= \{1,2,3\}$

## Problem 5

设 $R$是关系 $\{(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(3,1)\}$, $S$ 是关系 $\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,2)\}$, 求 $S \circ R$.

$S \circ R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$.

## Problem 6

设 $R_1$ 和 $R_2$ 分别是整数集合上的 “模 3同余”和 “模 4同余”关系, 即 $R_1 = \{(a,b) \mid a \equiv b(mod3)\}$ 和 $R_2 = \{(a,b) \mid a \equiv b(mod4)\}$. 求

(1) $R_1 \cup R_2$

(2) $R_1 \cap R_2$

(3) $R_1 - R_2$

(4) $R_2 - R_1$

(5) $R_1 \oplus R_2$

(1) $R_1 \cup R_2 = \{(a,b) \mid a \equiv b(mod 3) \vee a \equiv b(mod 4)\}$

(2) $R_1 \cap R_2 = \{(a,b) \mid a \equiv b(mod 12)\}$

(3) $R_1 - R_2 = \{(a,b) \mid a \equiv b(mod 3) \wedge a \not\equiv b(mod 12)\}$

(4) $R_2 - R_1 = \{(a,b) \mid a \equiv b(mod 4) \wedge a \not\equiv b(mod 12)\}$

(5) $R_1 \oplus R_2 = \{(a,b) \mid (a \equiv b(mod 3) \vee a \equiv b(mod 4)) \wedge a \not\equiv b(mod 12)\}$

## Problem 7

设 $R_1$ 和 $R_2$ 是 $A$ 上的关系, 试证明:

(1) $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$.

(2) $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$.

(1) 对 $\forall x, y \in A$, 有 $(x,y) \in (R_1 \cup R_2)^{-1}$

$\iff (y,x) \in R_1 \cup R_2$

$\iff ((y,x) \in R_1) \vee ((y,x) \in R_2)$

$\iff ((x,y) \in R_1^{-1}) \vee ((x,y) \in R_2^{-1})$

$\iff (x,y) \in (R_1^{-1} \cup R_2^{-1})$

故 $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$.

(2) 对 $\forall x, y \in A$, 有 $(x,y) \in (R_1 \cap R_2)^{-1}$

$\iff (y,x) \in R_1 \cap R_2$

$\iff ((y,x) \in R_1) \wedge ((y,x) \in R_2)$

$\iff ((x,y) \in R_1^{-1}) \wedge ((x,y) \in R_2^{-1})$

$\iff (x,y) \in (R_1^{-1} \cap R_2^{-1})$

故 $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$.

## Problem 8

确定定义在所有人的集合上的关系 $R$ 是否是自反的, 对称的, 反对称的和传递的, 其中 $(a,b) \in R$ 当且仅当

(1) $a$ 比 $b$ 高.

(2) $a$ 和 $b$ 同名.

(3) $a$ 和 $b$ 在同一天出生.

(4) $a$ 和 $b$ 有共同的祖父母.

| | 自反 | 对称 | 反对称 | 传递 |
|---|---|---|---|---|
| (1) | × | × | ✓ | ✓ |
| (2) | ✓ | ✓ | × | ✓ |
| (3) | ✓ | ✓ | × | ✓ |
| (4) | ✓ | ✓ | × | ✓ |

## Problem 9

找出下面定理证明中的错误.

“定理”: 设 $R$ 是集合 $A$ 上的对称的和传递的关系, 则 $R$ 是自反的.

“证明”: 设 $a \in A$. 取元素 $b \in A$ 使得 $(a,b) \in R$. 由于 $R$ 是对称的, 所以有 $(b,a) \in R$. 现在使用传递性, 由 $(a,b) \in R$ 和 $(b,a) \in R$ 可以得出 $(a,a) \in R$.

由"证明"过程, 知 $R \supseteq \{(a,b), (b,a), (a,a)\}$. 但 $(b,b)$ 未必在 $R$ 中.

则 $R$ 不一定自反.

举例: $A = \{1,2,3\}$.

$R = \{(1,2), (2,1), (1,1)\}$.

对称且传递, 但不自反

## Problem 10

设 $R_1$ 和 $R_2$ 是集合 $A$ 上的关系, 由以下矩阵表示.

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

求表示下述关系的矩阵.

(1) $R_1 \cup R_2$ (2) $R_1 \cap R_2$ (3) $R_2 \circ R_1$

(4) $R_1 \circ R_1$ (5) $R_1 \oplus R_2$

(1) $R_1 \cup R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $R_1 \cap R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (3) $R_2 \circ R_1 = R_1 \odot R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(4) $R_1 \circ R_1 = R_1 \odot R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (5) $R_1 \oplus R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

## Problem 11

使用沃舍尔算法找出下面 $\{a, b, c, d, e\}$ 上的关系的传递闭包.

(1) $\{(a,c), (b,d), (c,a), (d,b), (e,d)\}$

(2) $\{(b,c), (b,e), (c,e), (d,a), (e,b), (e,c)\}$

(3) $\{(a,b), (a,c), (a,e), (b,a), (b,c), (c,a), (c,b), (d,a), (e,d)\}$

(4) $\{(a,e), (b,a), (b,d), (c,d), (d,a), (d,c), (e,a), (e,b), (e,c), (e,e)\}$

(1)
$W_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ $W_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ $\cdots$ $W_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$

$W_5$ 即为 Warshell 算法计算出的传递闭包.

$\{(a,a), (a,c), (b,b), (b,d), (c,a), (c,c), (d,b), (d,d), (e,d)\}$

(2)
$W_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ $\cdots$ $W_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ $\{(b,b), (b,c), (b,e), (c,b), (c,c), (c,e), (d,a), (e,b), (e,c), (e,e)\}$

(3)
$W_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ $\cdots$ $W_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ $\{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (a,e), (b,a), (b,b), (b,c), (b,d), (b,e)$
$(c,a), (c,b), (c,c), (c,d), (c,e) (d,a), (d,b), (d,c), (d,d), (d,e)$
$(e,a), (e,b), (e,c), (e,d), (e,e)\}$

(4)
$W_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ $\cdots$ $W_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ $\{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (a,e), (b,a), (b,b), (b,c), (b,d), (b,e)$
$(c,a), (c,b), (c,c), (c,d), (c,e) (d,a), (d,b), (d,c), (d,d), (d,e)$
$(e,a), (e,b), (e,c), (e,d), (e,e)\}$

## Problem 12

设 $A=\{a,b,c,d,e,f\}$, $R$ 是 $A$ 上的关系, 且 $R=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle e,f\rangle\}$, 设 $R^*=t(s(r(R)))$, 则 $R^*$ 是 $A$ 上的等价关系.

(1) 给出 $R^*$ 的关系矩阵.

(2) 写出商集 $A/R^*$.

(1)
$$R^*=\begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&1&1 \end{pmatrix}$$

(2) $A/R^*=\{\{a,b,c\},\{d\},\{e,f\}\}$

## Problem 13

由 $n$ 个元素组成的集合上, 有多少个关系是:

a) 对称的?

b) 反对称的?

c) 非对称的?

d) 反自反的?

e) 自反的和对称的?

f) 既不是自反的也不是反自反的?

a) $2^{\frac{n^2-n}{2}+n}$

b) $\cancel{2^{\frac{n^2-n}{2}+n}}$ $2^n 3^{\frac{n^2-n}{2}}$

c) $\underline{2^{n^2}-2^{\frac{n^2-n}{2}+n}}$

d) $2^{n^2-n}$

e) $2^{\frac{n^2-n}{2}}$

f) $(2^n-2)\,2^{n^2-n}$

## Problem 14

设 $R$ 和 $S$ 是集合 $A$ 上的自反关系. 证明 $R\cap S$ 和 $R\cup S$ 是自反的.

对 $\forall a\in A$. $R$、$S$ 是集合 $A$ 上的自反关系, 有

$\langle a,a\rangle\in R$, $\langle a,a\rangle\in S$.

从而有 $\langle a,a\rangle\in R\cap S$

$\langle a,a\rangle\in R\cup S$.

若 $\langle a,b\rangle\in R\cap S$, 其中 $a\neq b$.

有 $\langle a,b\rangle\in R$ 且 $\langle a,b\rangle\in S$

又 $R$、$S$ 是集合 $A$ 上的自反关系

不存在 $\langle a,b\rangle\in R$ 或 $\langle a,b\rangle\in S$. $a\neq b$.

矛盾. 故仅有 $\langle a,a\rangle\in R$ 或 $\langle a,a\rangle\in S$.

故 $R\cap S$ 是自反的.

同理 $R\cup S$ 是自反的.

## Problem 15

集合 $\{1,2,3,4\}$ 上的关系 $R=\{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4)\}$ 具有哪些性质?

其关系矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由于对角线上元素不全为0或1. 故无自反性、反自反性

由于矩阵既不对称又不反对称 因此无对称性、反对称性.

由 Warshell 算法 A的传递闭包为 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$.

故具有传递性.

综上, 具有传递性.

## Problem 16

证明: 集合 $A$上的关系 $R$是反对称的, 当且仅当 $R\cap R^{-1}$ 是恒等关系 $\{(a,a)|a\in A\}$ 的子集.

必要性 $(\Rightarrow)$: 由R是反对称的

A的关系矩阵中有 $a_{ij}\neq a_{ji}$ $(i\neq j)$.

故 $R\cap R^{-1}$ 的关系矩阵是对角阵. 形如 $M=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}\end{pmatrix}$.

故 $R\cap R^{-1}\subseteq\{(a,a)|a\in A\}$.

充分性 $(\Leftarrow)$: 由 $R\cap R^{-1}\subseteq\{(a,a)|a\in A\}$.

有 $R\cap R^{-1}$ 的关系矩阵是对角阵. 形如 $M=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}\end{pmatrix}$.

故对 $\forall a_{ij}\in R$. $(i\neq j)$. 在$R^{-1}$中有 $a_{i'j'}\neq a_{ij}$.

而 $a_{i'j'}=a_{ji}$. 故 R中有: $a_{ij}\neq a_{ji}$.

故 R是反对称的.

矩阵法

---

定义法

必要性 $(\Rightarrow)$: 对 $\forall(x,y)\in R\cap R^{-1}$. 即 $(x,y)\in R$ 且 $(x,y)\in R^{-1}$. 有 $(y,x)\in R$.

由于R是反对称的, 有 $x=y$.

故 $(x,y)\in\{(a,a)|a\in A\}$.

故 $R\cap R^{-1}\subseteq\{(a,a)|a\in A\}$.

充分性 $(\Leftarrow)$: 对 $\forall(x,y),(y,x)\in R$. 有 $(x,y)\in R^{-1}$.

则 $(x,y)\in R\cap R^{-1}$. $R\cap R^{-1}\subseteq\{(a,a)|a\in A\}$.

故 $x=y$.

故 R是反对称的.

# 第八周作业：偏序集与偏序格

## Problem 1

下面哪些是偏序集?

(a) $(\mathbb{Z}, =)$ (b) $(\mathbb{Z}, \neq)$ (c) $(\mathbb{Z}, \geq)$ (d) $(\mathbb{Z}, \nmid)$

a) 是

b) 不是，不满足自反性.

c) 是

d) 不是，不满足反对称性.

## Problem 2

对偏序集

$$(\{\{1\},\{2\},\{4\},\{1,2\},\{1,4\},\{2,4\},\{3,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\},\subseteq),$$

回答下述问题.

a) 求极大元素.

b) 求极小元素.

c) 存在最大元素吗? 如果存在请求出.

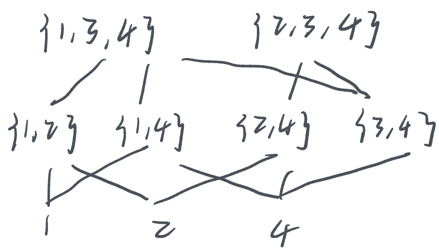
d) 存在最小元素吗? 如果存在请求出.

e) 求 $\{\{2\},\{4\}\}$ 的所有上界.

f) 如果存在的话, 求 $\{\{2\},\{4\}\}$ 的最小上界.

g) 求 $\{\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}$ 的所有下界.

h) 如果存在的话, 求 $\{\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}$ 的最大下界.




a) $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$

b) $\{1\}$, $\{2\}$, $\{4\}$

c) 不存在

d) 不存在

e) $\{2,4\}$, $\{2,3,4\}$

f) $\{2,4\}$

g) $\{1\}$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{1,2\}$, $\{1,4\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$

h) 不存在

## Problem 3

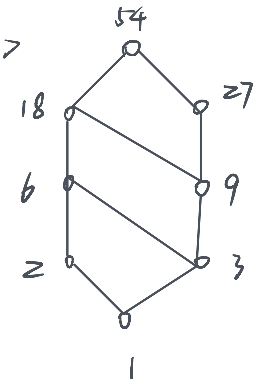
已知 $A$ 是由 54 的所有因子组成的集合, 设 $|$ 为 $A$ 上的整除关系,

(1) 画出偏序集 $(A, |)$ 的哈斯图.

(2) 确定 $A$ 中最长链的长度, 并按字典序写出 $A$ 中所有最长的链.

(3) 试计算 $A$ 中元素至少可以划分成多少个互不相交的反链, 并完整写出这些反链.

(1)




(2) $\{1,2,6,18,54\}$

$\{1,3,6,18,54\}$

$\{1,3,9,18,54\}$

$\{1,3,9,27,54\}$

(3) 5个

$\{1\}$ $\{2,3\}$ $\{6,9\}$ $\{18,27\}$ $\{54\}$

## Problem 4

设 $<S, \preccurlyeq>$, 且它的最大反链长度是 $n$, 证明如果将它分解成链，则链的条数至少是 $n$.

设A是最大的反链，A含有n个元素.

若偏序集能分成 $n-1$ 条链，由鸽巢原理， A的n个元素中必有2个元素取自同一条链.

故这两个元素可比

与A为反链矛盾.

故至少有n条链.

## Problem 5

证明: 长度为 $mn+1$ 的偏序集存在大小为 $m+1$ 的链或存在大小为 $n+1$ 的反链.

假设最长链长度不超过 m,

构造函数 f, 其定义域中元素为以 $a_i$ 作为开头的最长链长度.

像集合为 $\{1,2,\cdots,m\}$.

故 $1 \le f(a_i) \le m$. 由鸽巢原理, $\exists b_i \in \{1,2,\cdots,m\}$, $|f^{-1}(b_i)| \ge n+1$

故至少存在 $m+1$ 个 $a_i$, 使得以 $a_i$ 作为开头的最长链长度相同为 $b_i$.

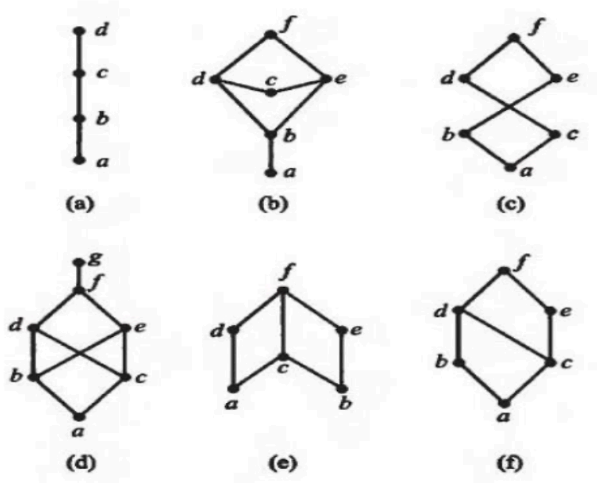
故必定存在大小为 $n+1$ 的反链.

反之同理.

故原命题得证.

## Problem 6

下图给出了 6 个偏序集的哈斯图. 判断其中哪些是格. 如果不是格, 请说明理由.




a) 是

b) 不是, {c,d}无最小上界

c) 是

d) 不是, {d,e}无最大下界

e) 不是, {a,b}无最大下界

f) 是

格与空间

群、代数系统

→ 线性空间

代数 → 线性变换

## Problem 7

格 **Problem 6** (c) 的哪些元素有补元? 对于有补元的元素, 写出其补元.

$a'=f$ $b'=d$ $c'=e$

$f'=a$ $d'=b$ $e'=c$

## Problem 8

分配格：满足分配律

说明格 **Problem 6** (c) 是否为分配格, 有补格或布尔格.

~~是~~分配格，可展开为一条链. 有5元子格(?)

是有补格，对 $\forall x\in C$，有补元存在

~~是~~布尔格，存在上界与下界，每个元素都有唯一补元

$e\wedge(b\vee c)=e\wedge f=e$

$(e\wedge b)\vee(e\wedge c)=b\vee a=b$

## Problem 9

设 $(L,\leq)$ 为一有界分配格，$L_1$ 是 $L$ 中所具有补元的元素组成的集合，试证明：$(L_1,\leq_1)$ 是 $(L,\leq)$ 的子格

最小上界 最大上界

对 $\forall a,b\in L_1$，$\exists\ a\vee b,\ a\wedge b$.

对 $\forall a\in L_1$，$a$的补元$a'$存在.

对 $\forall a\in L_1$，$a\vee a'$ 与 $a\wedge a'$ 存在.

故 $\langle L_1,\leq\rangle$ 是一个格.

对 $\forall a\in L_1$，$a\in L$，有 $L_1\subseteq L$.

对 $\forall a,b\in L_1$，$\exists\ a\vee b$、$a\wedge b\in L_1\subseteq L$

对 $\forall a\in L_1$，$\exists\ a'\in L_1\subseteq L$.

故$\langle L_1,\leq\rangle$是$\langle L,\leq\rangle$的子格.

## Problem 10

设格 $(L, \leq)$, 试证明对于任意的 $a, b, c \in L$, 有 $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ 成立等价于 $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ 成立

必要性 $\Rightarrow$: $(a\wedge b)\wedge(a\wedge c) = ((a\vee b)\wedge a)\vee((a\vee b)\wedge c)$ 用条件

$= a\vee(c\wedge(a\vee b))$ 化简

$= a\vee((c\wedge a)\vee(c\wedge b))$ 分配

$= a\vee(c\wedge a)\vee(c\wedge b)$ 化简

$= a\vee(b\wedge c)$ 化简

充分性 $\Leftarrow$: $(a\wedge b)\vee(a\wedge c) = ((a\wedge b)\vee a)\wedge((a\wedge b)\vee c)$ 用条件

$= a\wedge(c\vee(a\wedge b))$ 化简

$= a\wedge((c\vee a)\wedge(c\vee b))$ 分配, 化简

$= a\wedge(b\vee c)$ 化简

故原命题得证.

# 第九周作业: 代数系统引论与群论导引

## Problem 1

设 $S$ 为 $n$ 元集, 问

(1) 集合 $S$ 上可以定义多少个不同的二元运算?

(2) 其中有多少个二元运算是可交换的?

(3) 其中有多少个二元运算是幂等的?

(4) 其中有多少个二元运算是既不可交换又不幂等的?

(1) A上的二元运算 $f: A\times A \to A$.
有 $|A^{A\times A}| = n^{n^2}$ 个.

(2) 可交换 $\Leftrightarrow$ 运算表关于主对角线对称.
有 $n^{\frac{n^2+n}{2}}$ 个.

(3) 幂等 $\Leftrightarrow$ 主对角线只有一个取值.
有 $n^{n^2-n}$ 个.

(4) 由容斥原理: $n = n^{n^2} - n^{\frac{n^2+n}{2}} - n^{n^2-n} + n^{\frac{n^2-n}{2}}$.

## Problem 2

设 $A = \{0, 1\}$, $S = A^A$,

(1) 试列出 $S$ 中的所有元素;

(2) 给出 $S$ 上函数复合运算的运算表, 并指出单位元、零元和每一个可逆元素的逆元.

(1) $f_1 = \{<0,0>, <1,0>\}$. $f_2 = \{<0,0>, <1,1>\}$ $f_3 = \{<0,1>, <1,0>\}$ $f_4 = \{<0,1>, <1,1>\}$.

(2)

| $\circ$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $f_1$ | $f_1$ | $f_1$ | $f_4$ | $f_4$ |
| $f_2$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ |
| $f_3$ | $f_1$ | $f_3$ | $f_2$ | $f_4$ |
| $f_4$ | $f_1$ | $f_4$ | $f_1$ | $f_4$ |

单位元: $f_2$
零元: 无
逆元: $f_2$、$f_3$是自身的逆元, 其余不可逆.

## Problem 3

设 $A = \{a, b, c\}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, 能否确定 $a, b, c$ 的值使得

(1) $A$ 对普通加法封闭?

(2) $A$ 对普通乘法封闭?

(1) 不能. 由集合的性质 $a \neq b \neq c$. . 至多存在一个0.
$\forall x \neq 0 \in A$, 都有 $x \in A$. $x+x \in A$ $x+x+x \in A$ $x+x+x+x \in A$ ...
则 $|A| > 3$
对普通加法不封闭

(2) 可以. 取 $A = \{-1, 0, 1\}$

## Problem 4

判断下列集合对所给的二元运算是否封闭, 并说明理由.

(1) 非零整数集合 $\mathbb{Z}^*$ 和普通的除法运算.

(2) 全体 $n \times n$ 实可逆矩阵集合关于矩阵加法和乘法运算, 其中 $n \geq 2$.

(3) 正实数集合 $\mathbb{R}^+$ 和 $\circ$ 运算, 其中 $\circ$ 运算定义为:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, a \circ b = ab - a - b$$

(4) $\mathbb{S} = \{x | x = \ln n, n \in \mathbb{Z}^+\}$ 关于普通的加法和乘法运算.

(1) 不封闭. 如 $\frac{3}{2} = 1.5 \notin \mathbb{Z}^*$.

(2) 加法不封闭. 对于可逆阵 $A$, $-A$ 也可逆. 而 $A + (-A) = 0$ 不可逆. 故不封闭.
乘法封闭. 对于可逆阵 $A, B$. $|A| \neq 0$. $|B| \neq 0$. 故 $|A \times B| = |A| \times |B| \neq 0$. 故 $A \times B$ 满秩, $A \times B$ 可逆. 故封闭.

(3) 不封闭. 取 $a=1, b=1$. $a \circ b = 1 \times 1 - 1 - 1 = -1 \notin \mathbb{R}^+$. 故不封闭

(4) 加法封闭. 对 $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^+$. 有 $\ln n_1 + \ln n_2 = \ln n_1 \cdot n_2$ $n_1 n_2 \in \mathbb{Z}^+$. 故封闭
乘法不封闭. 如 $\ln 2 \times \ln 3$ 不能表示为 $\ln n, n \in \mathbb{Z}^+$ 的形式.

## Problem 5

$\mathbb{R}$ 为实数集, 定义以下 4 个函数 $f_1, f_2, f_3, f_4$. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 有

$$f_1((x,y)) = x \cdot y, \qquad f_2((x,y)) = x - y,$$
$$f_3((x,y)) = \max(x,y), \qquad f_4((x,y)) = |x - y|.$$

(1) 判断上述二元运算是否为可交换, 可结合, 幂等的.

(2) 求上述二元运算的单位元, 零元以及每一个可逆元素的逆元.

(3) 设 $A = \{a, b\}$, 试给出 $A$ 上一个不可交换, 也不可结合的二元运算.

(1) 可交换: $f_1, f_3, f_4$. 不可交换 $f_2$.
可结合: $f_1, f_3$ 不可结合 $f_2, f_4$.
幂等: $f_3$ 不幂等 $f_1, f_2, f_4$

(2) $f_1$: $1_s = 1$, $0_s = 0$, $x^{-1} = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. $(x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 0)$.
$f_2$、$f_3$、$f_4$ 无单位元和零元

(3) 对二元运算 $\circ$:

| $\circ$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $a$ |
| $b$ | $b$ | $a$ |

不可交换, 不可结合.

## Problem 6

设 $S = \{1, 2, ..., 10\}$, 问下面定义的运算能否与 $S$ 构成代数系统 $\langle S, *\rangle$? 如果能, 则说明 $*$ 运算是否满足交换律、结合律, 并给出单位元和零元.

(1) $x * y = \gcd(x, y)$, $\gcd(x, y)$ 是 $x$ 与 $y$ 的最大公约数.

(2) $x * y = \mathrm{lcm}(x, y)$, $\mathrm{lcm}(x, y)$ 是 $x$ 与 $y$ 的最小公倍数.

(3) $x * y = \max(x, y)$.

(4) $x * y =$ 质数 $p$ 的个数, 其中 $x \le p \le y$.

(1) 能. $\gcd(x,y) = \gcd(y,x)$. 故满足交换律. $\gcd(\gcd(x,y), z) = \gcd(x, \gcd(y,z))$. 故满足结合律.
单位元不存在, 零元为 1.

(2) 不能, 如 $\mathrm{lcm}(3,7) = 21 \notin S$.

(3) 能. $\max(x,y) = \max(y,x)$. 故满足交换律. $\max(\max(x,y), z) = \max(x, \max(y,z))$. 故满足结合律.
单位元为 1, 零元为 10.

(4) 不能. $1 * 1 = 0 \notin S$.

## Problem 7

判断集合 $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x$ 与 5 互素 $\}$ 能否构成代数系统 $V = \langle \mathbb{N}, + \rangle$ 的子代数, 并说明理由.

不能. 如 $3 \in \mathbb{N}$ 且 $3 \nmid 5$, $2 \in \mathbb{N}$ 且 $2 \nmid 5$, 但 $3+2 \in \mathbb{N}$, 且 $(3+2) \mid 5 \notin A$.
故不封闭.

## Problem 8

设集合 $A = \{a, b, c, d\}$ 上的一个二元运算 $\circ$ 如下表所示:

(1) 说明运算是否可结合? 为什么?

(2) 求单位元与零元.

| $\circ$ | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | a | b | c | d |
| b | b | a | d | d |
| c | c | d | a | d |
| d | d | d | d | d |

(1) 不可结合. 如 $(b \circ c) \circ c = d \circ c = d \neq b \circ (c \circ c) = b \circ a = b$

(2) $1_S = a$ $\quad 0_S = d$.

## Problem 9

设集合 $A=\{a,b,c\}$，$\circ$ 是 $A$ 上的二元运算，在 $V=\langle A,\circ\rangle$ 的运算表中，除了 $a\circ b=a$ 以外，其余运算结果都等于 $b$. 试给出 $V=\langle A,\circ\rangle$ 的两个非恒等映射的自同态.

| $\circ$ | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | b | a | b |
| b | b | b | b |
| c | b | b | b |

（自同态：如果映射 $f$ 是 $V$ 到 $V$ 的，则称 $f$ 为自同态.）

设 f 为同态，设由 $f(b)f(b)=f(bb)=f(b)$. 有 $f(b)$ 是幂等元.

而运算表中只有 b 是幂等元. 故有 $f(b)=b$.

假设 $f(c)=a$，有

$b=f(b)=f(cb)=f(c)f(b)=ab=a$ 矛盾. 故 $f(c)\neq a$.

同理，$f(a)\neq c$.

故同态映射 f 满足 $f(b)=b$，$f(c)\neq a$，$f(a)\neq c$.

故可能的赋值：$f_1=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,b\rangle\}$.

$f_2=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle\}$.

$f_3=\{\langle a,b\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,b\rangle\}$

$f_4=\{\langle a,b\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle\}$.

又 $f_1(ac)=f_1(b)=b$. $f_1(a)f_1(c)=ab=a$.

故只有 $f_3$，$f_4$ 满足要求.

## Problem 10

判断下列集合关于指定的运算是否构成半群, 独异点和群：（幺半群）

(1) $a$ 是正实数, $G=\{a^n|n\in\mathbb{Z}\}$, 运算是普通乘法.

(2) $\mathbb{Q}^+$ 为正有理数, 运算是普通乘法.

(3) $\mathbb{Q}^+$ 为正有理数, 运算是普通加法. 半.

(4) 一元实系数多项式的集合关于多项式的加法.

(5) 一元实系数多项式的集合关于多项式的乘法. 幺半

(6) $U_n=\{x|x\in\mathbb{C}\wedge x^n=1\}$, $n$ 为某个给定正整数, $\mathbb{C}$ 为复数集合, 运算是复数乘法.

注: (4) (5) 两小题中, 形如 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, 只有 $x$ 一个变元, 系数均为实数的多项式, 叫做一元实系数多项式.

(1) 是是是，封闭性：$a^{n_1}\cdot a^{n_2}=a^{n_1+n_2}\in G$. 结合性 $a^{n_1}\cdot a^{n_2}\cdot a^{n_3}=a^{n_1}(a^{n_2}\cdot a^{n_3})=a^{n_1+n_2+n_3}$.

存在单位元 $a^0$. 对于 $a^n$，存在逆元 $a^{-n}$.

(2) 是是是，封闭性. $q_1q_2\in\mathbb{Q}^+$ 结合性. $q_1q_2q_3=q_1(q_2q_3)$ 存在单位元 1. 对于 q 存在逆元 $\frac{1}{q}$.

(3) 是不不 封闭性. $q_1+q_2\in\mathbb{Q}^+$. 结合性. $q_1+q_2+q_3=q_1+(q_2+q_3)$ 不存在单位元.

(4) 是是是 封闭性. $f_1(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ $f_2(x)=b_nx^n+\cdots+b_1x+b_0$. $f_3(x)=c_nx^n+\cdots+c_1x+c_0$.

$f_1(x)+f_2(x)=(a_n+b_n)x^n+\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)\in$ {一元实系数多项式}.

结合性. $f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)=f_1(x)+(f_2(x)+f_3(x))=(a_n+b_n+c_n)x^n+\cdots+(a_1+b_1+c_1)x+(a_0+b_0+c_0)$.

存在单位元 0，对 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$. 存在逆元 $f^{-1}(x)=-a_nx^n-\cdots-a_1x-a_0$.

(5) 是是不. 封闭性. $f_1(x)\cdot f_2(x)$ 由乘法分配律仍为实系数多项式.

结合性. 由乘法的结合性显然.

存在单位元 1. 不存在逆元 (1 除外).

(6) 是是是 封闭性. $x_1^{n_1}=1$，$x_2^{n_2}=1$，有 $(x_1x_2)^{n_1n_2}=1$. 结合性. $x_1(x_2x_3)=x_1x_2x_3$

存在单位元 1. 存在逆元 $x^{-1}$.

## Problem 11

$S = \{a, b, c\}, *$ 是 $S$ 上的二元运算, 且 $\forall x, y \in S, x * y = x$.

(1) 证明 $S$ 关于 $*$ 运算构成半群.

(2) 试判断 $S$ 成为独异点的条件.

(1) 封闭性. 对 $\forall x, y \in S$. $x * y = x \in S$. 结合性 $x * y * z = x * (y * z) = x$.

故构成半群.

(2) 取 $e \notin S$. 定义 $T = S \cup \{e\}$.

对 $\forall x \in S$. 有 $x * e = e * x = x$.

$e * e = e$.

则 $<T, *>$ 构成独异点. (幺半群)

## Problem 12

证明：有单位元且满足消去律的有限半群一定是群。

只需证明每个元素都有逆.

设 $G$ 是上述半群. $g \in G$.

$f: G \to G$. $f(h) = g \times h$.

设 $f(h_1) = f(h_2)$. 有 $gh_1 = gh_2$

由消去律, $h_1 = h_2$.

故为单射, 又为有限集

故为双射.

$\exists a \in G$, $f(a) = 1$.

即 $g \times a = 1$.

即 $a$ 是 $g$ 的右逆.

同理存在左逆.

故存在逆元.

故此半群一定是群.

## Problem 13

设 $G$ 是一个群, 并且 $|G|$ 为偶数, 证明 $G$ 中必定存在一个元素 $g$ 满足 $g \neq e$ 且 $g = g^{-1}$

考虑 $G$ 中不存在这样的 $g$.

则 $g$ 与 $g^{-1}$ 成对出现.

剩余所有元素与它的逆都成对出现. (除了单位元 $e$

故 $|G - e|$ 是偶数.

$|G|$ 是奇数, 与题设矛盾.

故原命题成立.

## Problem 14

证明：设 $a$ 是群 $\langle G, \circ \rangle$ 的幂等元, 则 $a$ 一定是单位元.

群具有消去律.

对幂等元 $a$, 有 $a \circ a = a$. 则 $a \circ a = a \circ e$. 则 $a = e$. 得证.

## Problem 15

(结合律) 假定集合 $S$ 上定义的二元操作 $\circ$ 满足结合律. 我们知道二元操作只定义在两个元素上, 当参与运算的元素超过两个时, 会有很多种不同的顺序, 比如, 假定 $a, b, c, d \in S$, 那么可能会有的情况有

$$(a \circ b) \circ (c \circ d), (a \circ (b \circ c)) \circ d, a \circ ((b \circ c) \circ d)$$

等等, 注意到**每一步只进行一次运算**. 证明：无论我们怎么放置括号, 这种嵌套运算的最终结果是不变的. 即证明对 $s_1 s_2 ... s_n \in S$, 任意括号嵌套顺序下的结果都等同于 $((...((s_1 \circ s_2) \circ s_3)...) \circ s_n)$.

(提示：使用数学归纳法, 基础情况是 $n = 2$, 手动尝试一下从 $n = 4$ 到 $n = 5$ 的情况).

归纳奠基：当 $n=2$ 时成立.

当 $n=3$ 时, 即 $(s_1 \circ s_2) \circ s_3 = s_1 \circ (s_2 \circ s_3)$ 等价于结合律, 成立.

归纳步骤：假设当 $n=k$ $(k \geq 4)$ 时结论成立.

当 $n=k+1$ 时, 有 $\pi(a_1 \circ \cdots \circ a_k \circ a_{k+1}) = a_1 \circ \pi(a_2 \circ \cdots \circ a_k \circ a_{k+1})$. (*)

对 $\forall \pi(a_1 \circ \cdots \circ a_{k+1})$ 总可以化为 $(a_1 \circ \cdots \circ a_i) \circ (a_{i+1} \circ \cdots \circ a_{k+1})$.

若 $i=1$, 等价于(*), 成立.

若 $i \neq 1$, $\pi(a_1 \circ \cdots \circ a_{k+1}) = (a_1 \circ \cdots \circ a_i) \circ (a_{i+1} \circ \cdots \circ a_{k+1})$

$= [a_1 \circ (a_2 \circ \cdots \circ a_i)] \circ (a_{i+1} \circ \cdots \circ a_{k+1})$

$= a_1 \circ (a_2 \circ \cdots \circ a_i) \circ (a_{i+1} \circ \cdots \circ a_{k+1})$

$= a_1 \circ (a_2 \circ \cdots \circ a_{k+1})$

由归纳假定, 成立. 故得证.

## Problem 16

设 $G$ 为群，$a, b \in G$ 且是有限阶元。记 $|a| = r$，证明：

(1) $a^k = e$ $(k \in \mathbb{Z})$ 当且仅当 $r | k$

(2) $|b^{-1}ab| = |a|$

(3) $|ab| = |ba|$

(1) $a^r = e$ $\quad a^{rs} = e^s = e$ $\quad s \in \mathbb{Z}^+$. 令 $k = rs \Leftrightarrow r | k$. 故充要性得证.

(2) 由于 $(b^{-1}ab)^n = b^{-1} \cdot a^n \cdot b = e \Leftrightarrow a^n = b \cdot e \cdot b^{-1} = e$ 对 $n \in \mathbb{Z}^+$ 成立.

故 $|b^{-1}ab| = |a|$.

(3) 设 $|ab| = m$ $\quad |ba| = n$.

$(ab)^{n+1} = (ab) \cdot \overbrace{(ab) \cdots (ab)}^{n个} = a \overbrace{(ba) \cdots (ba)}^{n个} b = a(ba)^n \cdot b = aeb = ab$.

故 $(ab)^n = e$. 于是 $m | n$.

同理 $n | m$. 故 $m = n$. $\quad |ab| = |ba|$.

## Problem 17

(数论) 我们知道, 在整数集合 $Z$ 上的同余关系是一个等价关系. 我们用记号 $[a]_n$ 表示 a 的模 $n$ 同余类. 即

$$b \in [a]_n \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{n}.$$

模 $n$ 同余类构成的集合是一个重要的概念, 有许多记法, 例如 $\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 等. 例如 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[0]_2, [1]_2\}$. 对于正整数 $n$, 我们记扩展的加法为

$$[a]_n + [b]_n := [a+b]_n.$$

易证 $\mathbb{Z}_n$ 在扩展加法下构成一个群. 类似地, 扩展乘法为

$$[a]_n \times [b]_n := [a \times b]_n.$$

现在令 $\mathbb{Z}_n^* := \{[m]_n \in \mathbb{Z}_n | \gcd(m,n) = 1\}$. 证明: $\mathbb{Z}_n^*$ 在扩展乘法下构成一个群.

1° 封闭性. $[m_1]_n \cdot [m_2]_n = [m_1 m_2]_n$. $gcd(m_1 m_2, n) = 1$. $\in \mathbb{Z}_n^*$. 故封闭.

2° 结合律: $[m_1]_n \cdot [m_2]_n \cdot [m_3]_n = [m_1]_n([m_2]_n \cdot [m_3]_n)$ $gcd(m_1 m_2 m_3, n) = 1$.

3° 存在单位元 1. 对 $[m]_n = b$ 存在逆元 $b+n$.

故 $\mathbb{Z}_n^*$ 在扩展乘法下构成一个群.

## Problem 18

对没有单位元的半群 $M$ 是否一定能在其中加入一个新元素 $e$ 使得 $M \cup \{e\}$ 是含有单位元 $e$ 的半群?

是.

证明: 设 $(M, *)$ 是任一半群.

设 $a * e = e * a = a, \forall a \in S$

$e * e = e$,

故 $e$ 是 $S$ 中的单位元.

## Problem 19

设 $M$ 是有单位元 $e$ 的半群,$a, b$ 是 $M$ 中的可逆元, 试证 $ab$ 也是 $M$ 的可逆元。

$a \cdot a^{-1} = e \quad b \cdot b^{-1} = e$

$ab \cdot (b^{-1} a^{-1}) = a(b \cdot b^{-1}) \cdot a^{-1} = a e a^{-1} = e$.

故 $ab$ 也可逆, 其逆元为 $b^{-1} a^{-1}$.

# 第十、十一周作业：
# 子群与群的分解，循环群与群同构，代数格

## Problem 1

设 $H$ 是 $G$ 的子群，证明 $H$ 在 $G$ 中的所有左陪集中有且只有一个是 $G$ 的子群，即 $\exists! K \in \{aH \mid a \in G\}$ 使得 $K$ 是 $G$ 的子群。

设 $e$ 是 $G$ 的单位元，则 $eH = H$ 是 $G$ 的一个子群

由于 $H$ 在 $G$ 中的任意两个左陪集要么相同，要么不相交.

故其它左陪集均不含单位元 $e$.

而子群的单位元只能是 $G$ 的单位元.

故除 $H$ 外其它左陪集均不是 $G$ 的子群.

## Problem 2

设 $G$ 是有限群，$A$ 与 $B$ 是 $G$ 的两个非空子集，且 $|A| + |B| > |G|$，求证 $G = AB$

由题，$AB \subseteq G$，只需证 $G \subseteq AB$.

假设 $G \nsubseteq AB$. 取 $g \in G - AB$. $B^{-1} = \{b^{-1} \mid b \in B\}$.

假设 $gB^{-1} \cap A \neq \phi$，取 $x \in gB^{-1} \cap A$. 则 $x = gb^{-1} = a$. 故 $g = ab \in AB$ 矛盾.

故 $gB^{-1} \cap A = \phi$. $A \subseteq G - gB^{-1}$

故 $|A| \leq |G| - |gB^{-1}| = G - |B|$

即 $|A| + |B| \leq |G|$ 与题设矛盾

故假设不成立，$G \subseteq AB$.

故 $G = AB$.

## Problem 3

设 $H$是群 $G$的子群, $x \in G$, 令 $xHx^{-1} = \{xhx^{-1} | h \in H\}$, 证明 $xHx^{-1}$ 是 $G$的子群, 称为 $H$的共轭子群.

$\forall a, b \in xHx^{-1}$，$\exists h_1, h_2 \in H$，使得 $a = xh_1x^{-1}$，$b = xh_2x^{-1}$.

而 $ab = (xh_1x^{-1})(xh_2x^{-1}) = xh_1h_2x^{-1}$. $h_1h_2 \in H$，故 $ab \in xHx^{-1}$.

$a^{-1} = (xh_1x^{-1})^{-1} = (x^{-1})^{-1}h_1^{-1}x^{-1} = xh_1^{-1}x^{-1}$ $h_1^{-1} \in H$. 故 $a^{-1} \in xHx^{-1}$.

由子群的判定定理 1. $xHx^{-1}$ 是 $G$ 的子群.

## Problem 4

设 $H$和 $K$分别为群 $G$的 $r,s$ 阶子群，若 $r$ 与 $s$ 互素，证明 $H\cap K=\{e\}$.

由于H、K是G的子群，故 $e\in H\cap K$.
假设存在 $x\in H\cap K$ 且 $x\neq e$.
则 $x\in H \wedge x\in K$.
有 $\langle x\rangle\leq H$，$\langle x\rangle\leq K$.
由 Lagrange 定理 $|\langle x\rangle|\,\big|\,|H|$，$|\langle x\rangle|\,\big|\,|K|$.
故 $|\langle x\rangle|\,|\,r$，$|\langle x\rangle|\,|\,s$ 且 $\gcd(r,s)=1$
故 $|\langle x\rangle|=1$，$x=e$ 与假设矛盾.
故 $H\cap K=\{e\}$.

## Problem 5

证明：若 $G$ 中只有一个 2 阶元，则这个 2 阶元一定与 $G$ 中所有元素可交换。

设二阶元为 $a$.
对 $\forall x\in G$，有 $(xax^{-1})(xax^{-1})=xa(x^{-1}x)ax^{-1}=xa^2x^{-1}=e$.
故 $|xax^{-1}|=2$ 或 $|xax^{-1}|=1$.
若 $|xax^{-1}|=1$，则 $xax^{-1}=e\Rightarrow xa=x\Rightarrow a=e$. 与 $a$是二阶元矛盾.
故 $xax^{-1}$ 是二阶元. 由二阶元的唯一性，$xax^{-1}=a$
故 $xa=ax$. $a$是可交换的

## Problem 6

证明：在群 $G$ 中，如果 $g,h\in G$ 满足 $gh=hg$，并且 $\gcd(|g|,|h|)=1$，那么 $|gh|=|g||h|$
（提示：令 $N=|gh||g|$，使用阶的性质和交换律）

令 $N=|gh||g|\in\mathbb{Z}^+$.
由 $gh=hg$. 有 $g^Nh^N=(gh)^N=(hg)^N=h^Ng^N$.
由 $\gcd(|g|,|h|)=1$，有 $|g|$与$|h|$互质
根据阶的性质，有 $g^k=e$，$h^l=e$. $k,l\in\mathbb{Z}^+$.
有 $g^kh^l=h^lg^k$
$(g^N)^k(h^N)^l=(h^N)^l(g^N)^k$，将 $g,h$ 替代为 $g^N,h^N$.
故 $(g^N)^k(h^N)^l=(g^k)(h^l)^N$
由 $(g^k)(h^l)^N=(h^l)^N(g^k)$，$g^k,(h^l)^N\in G$.
故 $|g^k|\,|\,|G|$，$|(h^l)^N|\,|\,|G|$
由 $\gcd(|g|,|h|)=1$ 故 $|gh|=N=|g||h|$.

## Problem 7

设群 $G$ 有子群 $H$，$H$ 是正规子群当且仅当

$$\forall g \in G, \forall h \in H : ghg^{-1} \in H$$

证明: 如果群 G 有且只有一个 d 阶子群，那么这个子群是正规的。

设 H是G的一个子群，且 $|H| = d$.

对 $\forall a \in G$. 有 $aHa^{-1}$ 是G的一个d阶子群.

由题，G的d阶子群唯一性.

故 $aHa^{-1} = H$，从而对 $\forall a \in G$，$\forall h \in H$，有 $aha^{-1} \in H$.

故 H是正规子群.

## Problem 8

证明：使用阶的概念证明费马小定理。即对素数 $p$ 和任意整数 $a$，均有 $a^p \equiv a \pmod p$。

（提示：考虑集合 $\mathbb{Z}_n^* := \{[m]_n \in \mathbb{Z}_n | \gcd(m,n) = 1\}$ 在乘法下构成的群。使用拉格朗日定理的拓展：元素的阶和群的阶之间的关系）

证明：

如果 $a$ 为 $p$ 的倍数，那么立即可得。

否则 $[a]_p$ 不为零，因此是 $\mathbb{Z}_p^*$ 的成员，群 $\mathbb{Z}_p^*$ 的阶为 $p-1$，故

$$[a]_p^{p-1} = [1]_p$$

也就是

$$[a]_p^p = [a]_p$$

得证。

对任意素数 $p$，考察乘法同余群 $\mathbb{Z}_p^* = \{1, 2, \cdots, p-1\}$.

这是一个阶数为 $p-1$ 的有限群.

对 $\forall a \in \mathbb{Z}_p^*$，$\langle a \rangle = \{a^m \mid m \in \mathbb{Z}_{ord(a)}\}$

由定义，有 $a^{ord(a)} \equiv 1 \pmod p$

因为循环群 $\langle a \rangle$ 是 $\mathbb{Z}_p^*$ 的一个子群.

由 Lagrange 定理，$|\langle a \rangle| \mid |\mathbb{Z}_p^*|$ 即 $|\langle a \rangle| \mid p-1$.

即 $\exists n \in \mathbb{Z}^+$，使得 $p-1 = ord(a) \cdot n$.

由 $a^{ord(a)} \equiv 1 \pmod p$，有 $a^{p-1} = (a^{ord(a)})^n \equiv 1 \pmod p$ 得证.

## Problem 9

对以下各小题给定的群 $G_1$ 和 $G_2$，以及 $f: G_1 \to G_2$，说明 $f$ 是否为群 $G_1$ 到 $G_2$ 的同态，如果是，说明是否为单同态、满同态和同构。求同态像 $f(G_1)$。

(1) $G_1 = \langle Z, + \rangle$, $G_2 = \langle R^*, \cdot \rangle$, 其中 $R^*$ 为非零实数集合，+ 和 · 分别表示数的加法和乘法。

$$f: Z \to R^*, f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ 是偶数} \\ -1 & x \text{ 是奇数} \end{cases}$$

(2) $G_1 = \langle Z, + \rangle$, $G_2 = \langle A, \cdot \rangle$, 其中 + 和 · 分别表示数的加法和乘法, $A = \{x | x \in C \wedge |x| = 1\}$, 其中 $C$ 为复数集合。

$$f: Z \to A, f(x) = \cos x + i \sin x$$

(1) 是同态，不是单同态，也不是满同态。 $f(G_1) = \{-1, 1\}$

(2) 是同态，是单同态，不是满同态。 $f(G_1) = \{\cos x + i\sin x \mid x \in \mathbb{Z}\}$.

## Problem 10

令 $G, G'$ 为群，函数 $f: G \to G'$ 是一个群同态。证明：

(1) $\ker f = \{x \in G \mid f(x) = e\}$ 是 $G$ 的子群。

(2) $\text{Img } f = \{x \in G' \mid \exists g \in G, f(g) = x\}$ 是 $G'$ 的子群

(1) 由于 $e_{G}$ 是 $G'$ 的单位元，$f(e_G) = e_{G'}$

即 $e_G \in Ker(f)$.

对 $\forall a, b \in Ker(f)$，有 $f(a) = e_{G'}$ 且 $f(b) = e_{G'}$.

f 是同态，有 $f(a \times b) = f(a) \times f(b) = e_{G'} \times e_{G'} = e_{G'}$.

故 $a \times b \in Ker(f)$，封闭性得证.

对 $\forall a \in Ker(f)$，有 $f(a^{-1}) = f^{-1}(a) = e_{G'}^{-1} = e_{G'}$

故 $a^{-1} \in Ker(f)$. 逆元素存在

故 $Ker(f)$ 是 $G$ 的子群.

(2) $f(e_G) = e_{G'}$，故 $e_{G'} \in Img(f)$.

对 $\forall a, b \in G$，$f(a), f(b) \in Img(f)$.

f 是同态，有 $f(a \times b) = f(a) \times f(b) \in Img(f)$. 封闭性得证

对 $\forall a \in G$ $f(a)^{-1} = f(a^{-1})$. $a^{-1} \in G$，故 $f(a)^{-1} \in Img(f)$.

逆元素存在

故 $Img(f)$ 是 $G'$ 的子群.

## Problem 11

设 $G_1$ 为循环群，$f$ 是群 $G_1$ 到 $G_2$ 的同态，证明 $f(G_1)$ 也是循环群。

设 $G_1=\langle a\rangle$. $f: G_1\to G_2$.

$\forall y\in f(G_1)$, $\exists a^i\in G_1$, 使得 $f(a^i)=y$.

$y=f(a^i)=f(\underbrace{a\cdot a\cdots a}_{i个})=\underbrace{f(a)f(a)\cdots f(a)}_{i个}=f^i(a)$

因此 $f(a)$是生成元，即 $f(G_1)=\langle f(a)\rangle$

所以 $f(G_1)$ 为循环群.

## Problem 12

设 $\phi$ 是群 $G$到 $\bar{G}$的同构映射，$a\in G$，证明：$a$ 的阶和 $\phi(a)$ 的阶相等。

因为 $(\phi(a))^{ord\, a}=(\phi(a))^{ord\,\phi(a)}=\phi(e)=e'$.

所以 $ord\, a\geqslant ord\,\phi(a)$.

而 $\phi(a^{ord\,\phi(a)})=(\phi(a))^{ord\,\phi(a)}=e'=\phi(e)$

$\phi$为同构映射.

故 $a^{ord\,\phi(a)}=e$，从而 $ord\,\phi(a)\geqslant ord\, a$.

综上. $ord\, a=ord\,\phi(a)$.

## Problem 13

证明：三阶群必为循环群.

(由 Lagrange 定理推论直接得：素数阶群为循环群).

设 $\langle G,*\rangle$ 为三阶群，$G=\{a,b,e\}$

由 Lagrange 定理，非单位元阶数为3.

故 $a,b$ 均为三阶元. $a,b$ 均为生成元

故 $\langle G,*\rangle$ 为循环群.

## Problem 14

设 $p$ 是素数，证明每一个 $p$ 阶群都是循环群，且以每一个非单位元的元素作为它的生成元。

设 $G$ 为 $p$ 阶群. 对 $\forall a\neq e$, $a\in G$.

令 $H=\langle a\rangle$.

则 $|H|\,\big|\,|G|$. $|G|=p$ 为素数，故 $|H|=1$ 或 $|H|=p$.

又 $a\neq e$, $|H|\neq 1$. 从而 $|H|=p$.

$H=G$.

即 $G$ 是循环群，且以每个非单位元为生成元.

? 
## Problem 15

设映射 $C^1[0,1]$ 是 $[0,1]$ 上的一阶连续可微函数按加法构成的群。是否存在 $C^1[0,1]$ 到自身的群同态 $\psi$使得 $\psi$的核同构于实数加法群？是否存在 $C^1[0,1]$ 到自身的群同态 $\psi$使得 $\psi$的象同构于实数加法群？

(1) 考虑 $\psi(f)=f'$. 这是一个从 $C'[0,1]$ 到 $[0,1]$ 上的连续函数群的群同态.

$Ker(\psi)=\{f\in C'[0,1] \mid f'=0\}$、即常函数集，与实数加法群同构.

(2) 考虑 $C'[0,1]$ 的一个子群 $H$，它由所有满足 $f(0)=0$ 的一阶连续可微函数构成.

定义 $\psi: H\to R$ 为 $\psi(f)=f(1)$. (从 $H$ 到实数加法群的群同态)

$\psi$ 的定义域为 $H\subset C'[0,1]$.

若 $\psi$ 扩展为 $C'[0,1]$，则不构成群同态. 不满足所有 $f\in C'[0,1]$ 满足 $f(0)=0$.

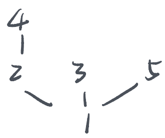
不存在从 $C'[0,1]$ 到自身的群同态 $\psi$.

因为它会包含一个 $C'[0,1]$ 的非平凡子群不与实数加法群同构

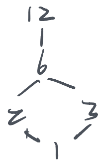
## Problem 16

下列各集合对于整除关系都构成偏序集，判断哪些偏序集是格.

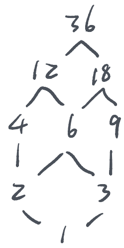
(1) $L=\{1,2,3,4,5\}$;




(2) $L=\{1,2,3,6,12\}$;




(3) $L=\{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$;




(4) $L=\{1,2,2^2,\cdots,2^n,\cdots\}$.


(1) 不是 $\{2,3\}$ 无最小上界

(2) 是

(3) 是

(4) 是

## Problem 17

设 $L$ 是格，并且 $a,b,c\in L$ 求以下公式的对偶式：

(1) $a\wedge(a\vee b)\preceq a$;

(2) $a\vee(b\wedge c)\preceq(a\vee b)\wedge(a\vee c)$;

(3) $b\vee(c\wedge a)\preceq(b\vee c)\wedge a$.

(1) $a\vee(a\wedge b)\succeq a$

(2) $a\wedge(b\vee c)\succeq(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$

(3) $b\wedge(c\vee a)\succeq(b\wedge c)\vee a$

## Problem 18

证明：试证明：具有三个或更多元素的链不是有补格

设具有三个或更多个元素的链为$<A, \preceq>$.

对$\forall a\in A$，且$a\neq 0$，$a\neq 1$.

如果$a$有补元$b$，即有 $a\vee b=1$，$a\wedge b=0$.

因为$<A, \preceq>$是链，所以必有 $a\preceq b$ 或 $b\preceq a$.

若 $a\preceq b$，则有 $a\wedge b=a=0$，矛盾.

若 $b\preceq a$，则有 $a\vee b=a=1$，矛盾.

故不存在$a$的补元$b$.

故这种链不是有补格.

## Problem 19

设 $<L, \preceq>$ 是格，任取 $a\in L$，令 $S=\{x|x\in L\wedge x\preceq a\}$, 证明 $<S, \preceq>$ 是 $L$的子格。

$a\in S$，$S$非空.

任取$x,y\in S$，则 $x\preceq a$，$y\preceq a$.

从而 $x\wedge y\preceq x\preceq a$ ， $x\vee y\preceq a\vee a\preceq a$.

$S$对$\wedge$和$\vee$封闭.

故$<S, \preceq>$是$L$的子格

## Problem 20

定义：一个群的子群格是由其所有子群和子群间的包含关系所构成的二元组 $(S, \subseteq)$。

令 $L$ 为长度为 $n$ 的链，$G=<a>$ 为 $p^t$ 阶循环群，其中 $p$ 为素数，$n=t+1$，求证：$L$ 与 $G$ 的子群格同构。

令 $L=\{0,1,\cdots,t\}$是长度为$n$的链，其偏序关系满足 $0<1<2<\cdots<t$.

由于$p^t$的正因子为 $1,p,p^2,\cdots,p^t$.

故$G$的子群是 $H_0=<a^{p^t}>=<e>$ $H_1=<a^{p^{t-1}}>$ $\cdots$ $H_t=<a^{p^0}>=<a>$.

$L(G)=\{H_i \mid i=0,1,\cdots,t\}$是$G$的子群格.

$H_i$是$G$的$p^i$阶子群且 $\forall i,j\in\{0,1,\cdots,t\}$，$i<j$，$H_i\subseteq H_j$.

设 $f(i)=H$，$i=0,1,\cdots,t$. 则$f$为双射.

即证 $f$为 $L\to L(G)$的同态.

对$\forall i,j\in L$，设 $i<j$，有

$f(i\wedge j)=f(i)=H_i=H_i\cap H_j=f(i)\cap f(j)$

$f(i\vee j)=f(j)=H_j=H_i\cup H_j=f(i)\cup f(j)$.

即$f$为$L\to L(G)$的同态，原命题得证.

## Problem 21

令 $\langle A, \preceq \rangle$ 表示一个有限全序集。证明：

(1) $A$ 是一个格并且是有界格

(2) 若 $A$ 的元素超过两个，那么它不可能是有补格。

(3) $A$ 是分配格

(1) $<A, \preceq>$ 是有限全序集，则对 $\forall a, b \in A$，有 $a \le b$ 或 $a \ge b$.

若 $a \le b$，则 $a \wedge b = a$，$a \vee b = b$. 若 $b \le a$，则 $a \wedge b = b$，$a \vee b = a$.

因此 $A$ 中任意两元素都存在最小上界和最大下界，$A$ 是一个格.

由于 $A$ 有限，故存在最小元 $a_{min}$，最大元 $a_{max}$. 对 $\forall a \in A$，有 $a_{min} \le a \le a_{max}$.

所以 $a_{min}$ 是 $A$ 的下界，$a_{max}$ 是 $A$ 的上界. 故 $A$ 是有界格.

(2) 假设 $A$ 的元素超过 2 个且是有补格.

故 $\forall a \in A$，$\exists a'$ 使得 $a \vee a' = a_{max}$ 且 $a \wedge a' = a_{min}$.

由 $A$ 是全序集且 $A$ 的元素超过 2 个，有 $\exists a, b \in A$，使得 $a < b < a_{max}$.

由 $A$ 是有补格，有 $\exists a'$ 使得 $a \vee a' = a_{max}$.

但 $b < a_{max}$. 故 $b \le a'$ 同理，$\exists b'$ 使得 $b \vee b' = a_{max}$，但 $a < a_{max}$，所以 $a \le b'$.

由 $a < b$ 且 $b \le a'$，有 $a < a'$，同理 $b < b'$.

但 $a \vee a' = a_{max}$，$b \vee b' = b_{max}$. 与全序集性质矛盾.

故假设不成立，$a$ 不是有补格.

(3) 由于 $A$ 是全序集，故对 $\forall a, b, c \in A$，都有 $a \le b$ 或 $b \le a$. $a \le c$ 或 $c \le a$.

即证 $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

分类讨论：若 $a \le b$ 且 $a \le c$，$a \vee (b \wedge c) = a \vee b = a = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

$b \le a$ 且 $c \le a$，$a \vee (b \wedge c) = a \vee c = a = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

$b \le a$ 且 $a \le c$，$a \vee (b \wedge c) = a \vee b = a = (a \vee b) \wedge c = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

$c \le a$ 且 $a \le c$，$a \vee (b \wedge c) = a \vee c = a = c \wedge (a \vee b) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

故 $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. 对 $\forall a, b, c \in A$ 成立，$A$ 是分配格.

## Problem 22

设 $f$ 是格 $(L, \preceq_1)$ 到格 $(S, \preceq_2)$ 的满同态映射。证明：若 $(L, \preceq_1)$ 是有界格，则格 $(S, \preceq_2)$ 也是有界格。

设 $<L, \preceq_1>$ 的最大元和最小元分别为 1 和 0.

即证 $f(1)$ 和 $f(0)$ 是 $<S, \preceq_2>$ 的最大元和最小元.

对 $\forall f(x) \in S$，$x \in L$，有 $0 \preceq_1 x \preceq_1 1$

$f$ 是满同态映射，故 $f(0) \preceq_2 f(x) \preceq_2 f(1)$

所以 $f(1)$ 和 $f(0)$ 是 $<S, \preceq_2>$ 的最大元和最小元.

因此 $<S, \preceq_2>$ 是有界格.

# 第十二周作业:
# 布尔代数引论与图的基本概念

## Problem 1

设 $B$ 是布尔代数，$B$ 中的表达式 $f$ 是 $(a \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (b \wedge c)$.

(1) 化简 $f$;

(2) 求 $f$ 的对偶式 $f^*$.

(1) $(a\wedge b)$ 视为整体，由吸收律 $(a\wedge b)\vee(a\wedge b\wedge c)\equiv a\wedge b\wedge c$

同理 $(a\wedge b\wedge c)\vee(b\wedge c)\equiv a\wedge b\wedge c$.

故 $f$: $a\wedge b\wedge c$

(2) $f^*$: $(a\vee b)\wedge(a\vee b\vee c)\wedge(b\vee c)$

## Problem 2

设 $< B, \wedge, \vee, ', 0, 1 >$ 是布尔代数, 证明 $\forall a, b \in B$ 有以下命题成立

(1) $a \vee (a' \wedge b) = a \vee b$

(2) $a \wedge b' = 0 \Leftrightarrow a' \vee b = 1 \Leftrightarrow a \preceq b$

(1) $a\vee(a'\wedge b)=(a\vee a')\wedge(a\vee b)=1\wedge(a\vee b)=a\vee b$ 得证.

(2) 由 $a\wedge b'=0$，有 $(a\wedge b')'=0'$ 即 $a'\vee b')'=1$，即 $a'\vee b=1$

由 $a'\vee b=1$. 有 1° $b=1$. 则对 $\forall a\in B$, $a\preceq b$ 成立

2° $a'=1$. 则有 $a=0$，对 $\forall b\in B$, 有 $a\preceq b$ 成立.

故得证.

## Problem 3

设 $B$ 是布尔代数，$\forall a, b, c \in B$，若 $a \preceq c$，则 $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$，称这个等式为模律。证明布尔代数适合模律。

由 $a\preceq c$，有 $a\vee c=c$

有 $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\wedge c)=(a\vee b)\wedge c$ 得证

## Problem 4

设 $B$是布尔代数, $a_1, a_2, \cdots, a_n \in B$, 证明:

(1) $(a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n)' = a_1' \wedge a_2' \wedge \cdots \wedge a_n'$

(2) $(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n)' = a_1' \vee a_2' \vee \cdots \vee a_n'$

(1) 归纳奠基：当 $n=2$ 时为德摩根律.

归纳假设. 假设当 $n=k$ 时成立.

当 $n=k+1$ 时,

$(a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_{k+1})'=((a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_k)\vee a_{k+1})'$

$=(a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_k)'\wedge a_{k+1}'=(a_1'\wedge a_2'\wedge\cdots\wedge a_k')\wedge a_{k+1}'$

$=a_1'\wedge a_2'\wedge\cdots\wedge a_k'\wedge a_{k+1}'$ 得证

(2) 归纳奠基：当 $n=2$ 时为德摩根律.

归纳假设. 假设当 $n=k$ 时成立.

当 $n=k+1$ 时,

$(a_1\wedge a_2\wedge\cdots\wedge a_{k+1})'=((a_1\wedge a_2\wedge\cdots\wedge a_k)\wedge a_{k+1})'$

$=(a_1\wedge a_2\wedge\cdots\wedge a_k)'\vee a_{k+1}'=(a_1'\vee a_2'\vee\cdots\vee a_k')\vee a_{k+1}'$

$=a_1'\vee a_2'\vee\cdots\vee a_k'\vee a_{k+1}'$ 得证

# Problem 5

设 $(B, \vee, \wedge, -, 0, 1)$ 和 $(S, +, *, \neg, \hat{0}, \hat{1})$ 是两个布尔代数，$f$ 是 $B$ 到 $S$ 的映射。

证明：如果对于任意的 $a, b \in B$, 有

(1) $f(a \wedge b) = f(a) * f(b)$

(2) $f(\bar{a}) = \neg f(a)$

则 $f$ 是一个同态映射。

由布尔同态定义，只需证明 $f(a \vee b) = f(a) + f(b)$ 即可.

对 $\forall a,b \in B$，有 $f(a\vee b) = f(\overline{\overline{a\vee b}}) = f(\overline{\bar{a}\wedge\bar{b}}) = \neg f(\bar{a}\wedge\bar{b}) = \neg(f(\bar{a}) * f(\bar{b}))$

$$= \neg f(\bar{a}) + \neg f(\bar{b}) = f(\bar{\bar{a}}) + f(\bar{\bar{b}}) = f(a) + f(b).$$

故 $f$ 是一个同态映射.

# Problem 6

设 $< B, \wedge, \vee, ', 0, 1 >$ 是布尔代数, 在 $B$ 上定义二元运算 $\oplus$, $\forall x, y \in B$ 有

$$x \oplus y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y).$$

证明 $< B, \oplus >$ 是交换群, 并且 $\forall x, y, z \in B$ 有

$$(x \oplus y) \wedge z = (x \wedge z) \oplus (y \wedge z),$$

$$x \wedge (y \oplus z) = (x \wedge y) \oplus (x \wedge z).$$

注记: 这个练习给出了布尔代数上的环结构。

易得 $\oplus$ 在 $B$ 上封闭.

下证结合律：对 $\forall x,y,z \in B$，有 $(x\oplus y)\oplus z = ((x\wedge y')\vee(x'\wedge y))\oplus z = (((x\wedge y')\vee(x'\wedge y))\wedge z')\vee(((x\wedge y')\vee(x'\wedge y))'\wedge z)$

$$= (x\wedge y'\wedge z')\vee(x'\wedge y\wedge z')\vee((x'\vee y)\wedge(x\vee y')\wedge z)$$

$$= (x\wedge y'\wedge z')\vee(x'\wedge y\wedge z')\vee(x'\wedge y'\wedge z)\vee(x\wedge y\wedge z).$$

同理 $x\oplus(y\oplus z) = (x\wedge y'\wedge z')\vee(x'\wedge y\wedge z')\vee(x'\wedge y'\wedge z)\vee(x\wedge y\wedge z)$. 故满足交换律.

单位元：0　逆元：$\forall x\in B$，逆元为 $x$ 本身.

下证交换律：$x\oplus y = (x\wedge y')\vee(x'\wedge y) = (y\wedge x')\vee(y'\wedge x) = y\oplus x$.

故 $<B,\oplus>$ 是交换群. 对 $\forall x,y,z\in B$，有

$(x\oplus y)\wedge z = ((x\wedge y')\vee(x'\wedge y))\wedge z = (x\wedge y'\wedge z)\vee(x'\wedge y\wedge z) = ((x\wedge z)\wedge(y'\vee z'))\vee((x'\vee z')\wedge(y\wedge z)) = ((x\wedge z)\wedge(y\wedge z)')\vee((x\wedge z)'\wedge(y\wedge z)) = (x\wedge z)\oplus(y\wedge z)$

$x\wedge(y\oplus z) = x\wedge((y\wedge z')\vee(y'\wedge z)) = ((x\wedge y\wedge z')\vee(x\wedge y'\wedge z)) = (x\wedge y\wedge(x'\vee z'))\vee((x'\vee y')\wedge x\wedge z) = ((x\wedge y)\wedge(x\wedge z)')\vee((x\wedge y)'\wedge(x\wedge z)) = (x\wedge y)\oplus(x\wedge z)$

故得证

# Problem 7

设 $S$是命题逻辑中的全体公式，在其上定义定价关系 $\sim$如下：称 $\phi \sim \psi$, 如果 $\phi \leftrightarrow \psi$ 是重言式。记 $S$在 $\sim$下的全体等价类为 $S/\sim$, 试在 $S/\sim$ 上定义 $\wedge, \vee, ', 0, 1$ 使其成为一个布尔代数。

定义：记 $B=\{[\alpha] \mid \alpha\in S, [\alpha]\in S/\sim\}$. 在$B$上定义二元关系 $\preceq$：对 $\forall [\alpha],[\beta]\in B$，$[\alpha]\preceq[\beta]$ iff $\alpha\leftrightarrow\beta$ 成立.

易证 $<B,\preceq>$ 是偏序集.

$\forall [\alpha],[\beta]\in B$，由 $\alpha\to\alpha\vee\beta$，$\beta\to\alpha\vee\beta$，有 $[\alpha]$ 与 $[\beta]$ 的最大下界为 $[\alpha\wedge\beta]\in B$. 故 $<\beta,\preceq>$ 是格.

格 $<B,\preceq>$ 中全上界为重言式集，记为 $[1]$，全下界为矛盾式集，记为 $[0]$.

故 格 $<B,\preceq>$ 是有界格.

$\forall [\alpha]\in B$，$\alpha\vee\alpha'=1$，$\alpha\wedge\alpha'=0$. 故 $[\alpha]$ 与 $[\alpha']$ 互补.

所以 $<B,\wedge,\vee,'>$ 是有补格

由 $\wedge$、$\vee$ 满足分配律，故 $<B,\wedge,\vee,'>$ 为布尔代数.

# Problem 8

设 $(B, \vee, \wedge, -, 0, 1)$ 是一个布尔代数，$n$ 元集合 $A \subseteq B$。记

$$A^* = \bigcap \{X | A \subseteq X \subseteq B\ X\text{是}B\text{的子布尔代数}\}$$

证明 $A^*$ 的基数不超过 $2^{2^n}$。

设 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$. 则 $A$ 的补集 $\bar{A} = B-A$.

$A$ 的子集有 $2^n$ 个，对 $\forall S \subseteq A$，构造 $X_S = S \cup \bar{A}$.

由于 $A \subseteq X_S \subseteq B$，且 $X_S = S \cup \bar{A}$，故 $X_S$ 是一个子布尔代数.

存在 $2^n$ 个 $X_S$. 故包含 $A$ 的子布尔代数至多为 $2^n$.

而 $A^* = \bigcap X_S$

因此 $|A^*| \leq 2^{2^n}$.

# Problem 9

证明或反驳：若无向图 $G$ 至少有两个顶点且各顶点度数均不相同，则 $G$ 不是简单图。

逆否命题：如果图 $G$ 是简单图，则 $G$ 要么只有一个顶点，要么存在至少两个度数相同的顶点.

只有一个顶点时显然成立，只需证明：如果图 $G$ 是简单图，则 $G$ 存在至少两个度数相同的顶点.

设 $G$ 中不存在度数相同的顶点，则由 $G$ 为简单图，$G$ 的顶点度数列：$0, 1, 2, \cdots, n-1$.

删去 0 度顶点，$G'$ 仍为简单图，$G$ 的顶点度数列：$1, 2, \cdots, n-1$，与 $G'$ 为简单图矛盾.

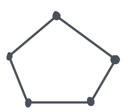
故假设不成立，逆否命题成立，原命题成立.

# Problem 10

**度序列：** 一个图的度序列是由图的各个顶点度按非递增序排列的序列（书 P.561）
判断下列序列是否能作为简单图的度序列。如果是，请画出一个简单图使其具有给定的度序列；若否，请说明理由。

a) 5,4,3,2,1,0 不能，度为奇数的点只能为偶数个.

b) 2,2,2,2,2 b)

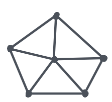


c) 5,4,2,1,1,1

d) 5,3,3,3,3,3

c) 不能. 由 Havel-Hakimi 定理，$5 \leq 6-1$，删去 5，其余 5 个元素 $-1$，有 3 1 0 0 0，删去 3，前 3 个元素 $-1$，有 $0\ -1\ -1\ 0$

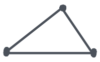
d)



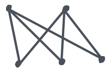
## Problem 11

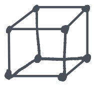
一个图的**度序列**是由该图的各个顶点的度按**非递增顺序**排列的序列。求下列各个图的度序列。

a) $K_5$ 

b) $C_3$ 

c) $W_4$ 

d) $K_{2,3}$ 

e) $Q_3$ 

a) 4, 4, 4, 4, 4

b) 2, 2, 2

c) 4, 3, 3, 3, 3

d) 3, 3, 2, 2, 2

e) 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3

## Problem 12

设无向图 $G$ 有 $\mathcal{V}$ 个顶点，$\mathcal{E}$ 条边，$\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$ 分别表示 $G$ 中度最小和度最大的顶点的度，证明 $\delta(G) \le \frac{2\mathcal{E}}{\mathcal{V}} \le \Delta(G)$。（其中 $\frac{2\mathcal{E}}{\mathcal{V}}$ 称为图的**顶点平均度**）

由 $\delta(G) \le d(v_i) \le \Delta(G)$，根据握手定理，有

$$v\delta(G) \le \sum_{i=1}^{v} d(v_i) \le v\Delta(G)$$

有 $\delta(G) \le \frac{2\varepsilon}{v} \le \Delta(G)$

## Problem 13

令 G 是至少有两个顶点的无向图，证明或反驳：

(a) 从图中删去一个度最大的顶点不会使其顶点平均度增加。

(b) 从图中删去一个度最小的顶点不会使其顶点平均度减少。

a) 由 Problem 12，有 $\frac{2\varepsilon}{v} \le \Delta(G)$ 当且仅当顶点度相同时取等.

若顶点度相同，有 $\frac{2\varepsilon}{v} = \Delta(G)$ 删去一个顶点，$\frac{2\varepsilon}{v} = \Delta(G)$ 不变.

若顶点度不同，有 $\frac{2\varepsilon}{v} < \Delta(G)$ 删去后 $(\frac{2\varepsilon}{v})' < \frac{2\varepsilon}{v} < \Delta(G)$

故不会增加

b) 由 Problem 12，有 $\frac{2\varepsilon}{v} \ge \delta(G)$ 当且仅当顶点度相同时取等.

若顶点度相同，有 $\frac{2\varepsilon}{v} = \delta(G)$ 删去一个顶点，$\frac{2\varepsilon}{v} = \delta(G)$ 不变.

若顶点度不同，有 $\frac{2\varepsilon}{v} > \delta(G)$ 删去后 $(\frac{2\varepsilon}{v})' > \frac{2\varepsilon}{v} > \delta(G)$

故不会减少

## Problem 14

证明：设 $G=<V,E>$ 是一个连通图，且 $|V|=|E|+1$，则 $G$ 中至少有一个度为 1 的顶点。

假设 $G$ 中不存在度为 1 的顶点.

由连通图的定义，每个结点的度至少为 2，有所有节点度之和 $\geq 2|V|$.

由握手定理，$\sum_{v\in V} deg(v) = 2|E|$.

由 $|V|=|E|+1$. 有所有节点度之和 $\geq 2|V| = 2|E|+2 > 2|E| = \sum_{v\in V} deg(v)$. 矛盾.

故假设不成立，至少存在一个度为 1 的顶点.

## Problem 15

令 $G$ 是一个顶点平均度为 $a$ 的无自环的无向图。

a) 证明：$G$ 删去一个顶点 $x$ 后平均度至少为 $a$，当且仅当 $deg(x) \leq \frac{a}{2}$；

b) 证明或反驳：如果 $a>0$，那么 G 有一个最小度大于 $\frac{a}{2}$ 的子图。

a) 设 $G<n,m>$ $\quad a = \frac{2m}{n}$.

设删去的顶点为 $x$，剩余 $n-1$ 个顶点，$m-deg(x)$ 条边.

删后平均度 $= \frac{2(m-deg(x))}{n-1} \geq a = \frac{2m}{n}$

解得 $deg(x) \leq \frac{m}{n} = \frac{a}{2}$

b) 若 $G$ 中存在点 $x$ 满足 $deg(x) \leq \frac{a}{2}$ 则删去，直到所有点均满足 $deg(x) > \frac{a}{2}$. 得到一个子图.

由于平均度为 $a$，由 a) 删去点 $deg(x) \leq \frac{a}{2}$，若只有两点则至少有一点满足 $deg(x) > \frac{a}{2}$.

## Problem 16

证明：不包含三角形 $K_3$ 作为子图的 $n$ 阶图，其边数 $m$ 必满足 $m \leq \frac{n^2}{4}$。

设 $x_1$ 是 $G$ 中具有最大度数的顶点（之一）. 记 $d(x_1)=d$，记与 $x_1$ 相连的 $d$ 个顶点为 $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-d+1}$.

由于 $G$ 中不含三角形. 故 $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-d+1}$ 中任意两点不相连.

故 $m \leq d(x_1) + d(x_2) + \cdots + d(x_{n-d})$

由 $d = d(x_1)$，有 $d(x_i) \leq d$ $(i=1,2,\cdots,n-d)$.

故有 $m \leq (n-d)d \leq (\frac{n-d+d}{2})^2 = \frac{n^2}{4}$.